8

Maria Zaharia
Dan Zaharia

GEOMETRIA în gimnaziu

Explicații și rezolvări complete

Editura Paralela 45

CUPRINS

Capitolul I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU **5**
Lecţia 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea planului. Relaţii între puncte, drepte şi plane 5
Recapitulare 9
Evaluare 11

Capitolul II. CORPURI GEOMETRICE **13**
Lecţia 1. Piramida: reprezentare, elemente caracteristice, desfăşurare 13
Lecţia 2. Prisma dreaptă: reprezentare, elemente caracteristice, desfăşurare 17
Lecţia 3. Cilindrul circular drept: reprezentare, elemente caracteristice, desfăşurare 22
Lecţia 4. Conul circular drept: reprezentare, elemente caracteristice, desfăşurare 25
Recapitulare 28
Evaluare 30

Capitolul III. PARALELISM ÎN SPAŢIU **32**
Lecţia 1. Drepte paralele. Unghiul a două drepte în spaţiu 32
Lecţia 2. Dreaptă paralelă cu un plan 35
Lecţia 3. Plane paralele 38
Lecţia 4. Secţiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate 42
Recapitulare 47
Evaluare 49

Capitolul IV. PERPENDICULARITATE **51**
Lecţia 1. Drepte perpendiculare. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanţa de la un punct la un plan 51
Lecţia 2. Aplicaţii: înălţimea unei piramide, înălţimea unui con circular drept 56
Lecţia 3. Distanţa dintre două plane paralele, înălţimea prismei drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă, a trunchiului de con circular drept 60
Lecţia 4. Plane perpendiculare 64
Lecţia 5. Aplicaţii: secţiuni diagonale şi secţiuni axiale în corpurile studiate 67
Recapitulare 73
Evaluare 75

Capitolul V. PROIECŢII ORTOGONALE ÎN SPAŢIU **77**
Lecţia 1. Proiecţii de puncte, de segmente şi de drepte pe un plan 77
Lecţia 2. Unghiul dintre o dreaptă şi un plan. Aplicaţie: lungimea proiecţiei unui segment pe un plan 82
Lecţia 3. Unghi diedru, unghi plan corespunzător diedrului, unghiul a două plane, plane perpendiculare 85
Lecţia 4. Teorema celor trei perpendiculare, calculul distanţei de la un punct la o dreaptă şi la un plan 88
Lecţia 5. Reciproce ale teoremei celor trei perpendiculare, calculul distanţei dintre două plane paralele 93
Recapitulare 98
Evaluare 100

Capitolul VI. ARII ŞI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE **102**
Lecţia 1. Distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate 102
Lecţia 2. Aria şi volumul prismei drepte. Aria şi volumul paralelipipedului dreptunghic, aria şi volumul cubului 109
Recapitulare 113
Evaluare 115
Lecţia 3. Aria şi volumul piramidei regulate 117
Lecţia 4. Aria şi volumul trunchiului de piramidă regulată 121
Recapitulare 126
Evaluare 128
Lecţia 5. Arii şi volume ale unor corpuri geometrice rotunde 130
Recapitulare 137
Evaluare 139

Soluţii 141

Capitolul I
ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAŢIU

Lecţia 1. Puncte, drepte, plane. Determinarea planului. Relaţii între puncte, drepte şi plane

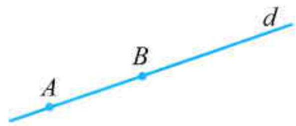
1. PUNCTE, DREPTE, PLANE

Cu noțiunile de *punct*, *dreaptă*, *plan* ne-am întâlnit încă din clasa a V-a. Am învățat atunci că aceste noțiuni sunt *noțiuni primare, fundamentale* care nu se definesc. Noțiunile de *punct*, *dreaptă*, *plan* au fost reprezentate în plan prin desene, folosind anumite convenții de notare.

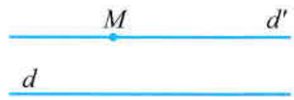
În clasa a VIII-a facem cunoștință cu geometria în spațiu. Toate axiomele geometriei plane și toate rezultatele învățate în geometria plană rămân valabile și în geometria în spațiu.

Geometria în spațiu se bazează pe următoarele *axiome*:

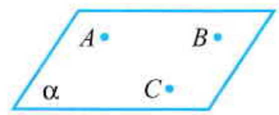
1. Axioma dreptei: *Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.* Dacă A și B sunt cele două puncte, atunci dreapta care trece prin cele două puncte se notează cu AB și spunem că este *dreapta determinată de punctele A și B*.



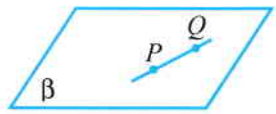
2. Axioma paralelelor sau axioma lui Euclid: *Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă la dreapta respectivă și numai una.* Dacă d este dreapta și M este un punct exterior dreptei d, atunci dreapta d', care trece prin punctul M, este paralela la dreapta d. Notăm $d' \parallel d$.



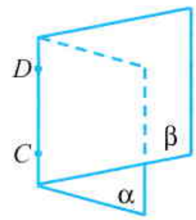
3. Axioma planului: *Prin trei puncte necoliniare trece un plan și numai unul. În orice plan există cel puțin trei puncte necoliniare.* Dacă A, B și C sunt cele trei puncte necoliniare, atunci *planul determinat* de ele se notează cu (ABC). În figura alăturată, în planul α sunt puse în evidență cele trei puncte care îl determină. Planul α coincide cu planul (ABC). Notăm $\alpha = (ABC)$.



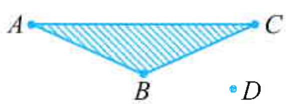
4. Axioma includerii: *Dacă două puncte distincte ale unei drepte aparțin unui plan, atunci dreapta determinată de aceste puncte este inclusă în plan.* Dacă P și Q sunt cele două puncte distincte care aparțin unui plan β, atunci dreapta determinată de ele este inclusă în plan. Dacă $P \in \beta$, $Q \in \beta$, $P \neq Q$, atunci $PQ \subset \beta$.



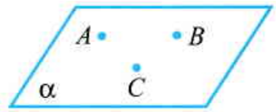
5. Axioma de intersecție a planelor: *Dacă două plane distincte au un punct comun, atunci ele se intersectează după o dreaptă care trece prin acel punct.* Dacă C este punctul comun planelor distincte α și β, atunci cele două plane mai au cel puțin un punct comun D, $D \neq C$ și intersecția lor este dreapta CD.



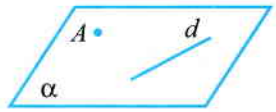
6. Axioma spațiului: *În spațiu există cel puțin patru puncte care nu sunt situate în același plan, numite puncte necoplanare.* În figura alăturată, punctele necoliniare A, B, C determină în mod unic planul (ABC) și punctul D este exterior planului (ABC), $D \notin (ABC)$. În acest caz, punctele A, B, C, D sunt puncte necoplanare, adică nu există un plan care să le conțină.



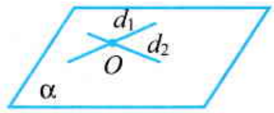
2. DETERMINAREA PLANULUI



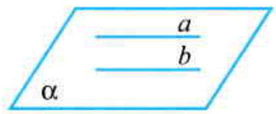
- **Axioma planului:** *Trei puncte necoliniare determină un plan α.* Dacă A, B, C sunt trei puncte necoliniare, atunci ele determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (ABC)$.



- *O dreaptă și un punct exterior determină un plan.* Dacă punctul A este exterior dreptei d, $A \notin d$, atunci dreapta d împreună cu punctul A determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (d, A)$.



- *Două drepte concurente determină un plan.* Dacă d_1 și d_2 sunt două drepte concurente, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$, atunci ele determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (d_1, d_2)$.



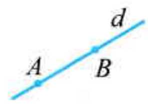
- *Două drepte paralele determină un plan.* Dacă a și b sunt două drepte paralele, $a \parallel b$, atunci ele determină în mod unic un plan α. Notăm $\alpha = (a, b)$.

Observație:

A determina un plan înseamnă a preciza numărul minim de elemente (puncte sau drepte) necesare pentru a-l identifica, pentru a ști cu exactitate unde se află acesta într-o configurație.

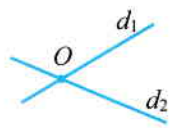
3. RELAȚII ÎNTRE PUNCTE, DREPTE ȘI PLANE

A. Pozițiile relative a două drepte în spațiu



- Două drepte sunt *identice* (*confundate* sau *coincid*) dacă au două puncte distincte comune.

  Exemplu: Dacă $A, B \in d$, $A \neq B$, atunci dreapta AB coincide cu dreapta d.

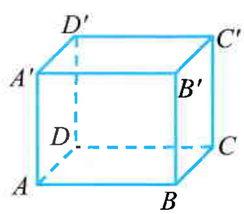


- Două drepte sunt *concurente* dacă au un punct comun.

  Exemplu: Dacă d_1 și d_2 au un punct comun, $d_1 \cap d_2 = \{O\}$, atunci d_1 și d_2 sunt drepte concurente.

- Două drepte sunt *paralele* dacă sunt coplanare și nu au puncte comune.

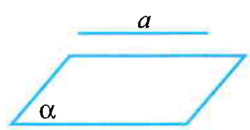
  Exemplu: Dacă $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \cap b = \varnothing$, atunci $a \parallel b$.



- Două drepte sunt *necoplanare* dacă nu au puncte comune și nu sunt paralele.

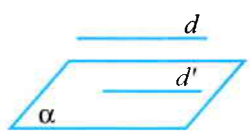
  Exemplu: În figura alăturată, dreapta AA' este *necoplanară* cu dreapta BC, cu dreapta CD, cu dreapta $B'C'$, cu dreapta $C'D'$.

B. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan



- **Dreaptă paralelă cu planul:** *dreapta și planul nu au niciun punct comun.*

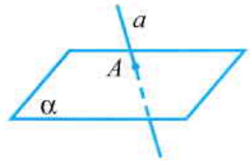
  Dacă o dreaptă a nu are niciun punct comun cu un plan α, atunci dreapta a este paralelă cu planul α și notăm $a \parallel \alpha$.



Teoremă: O dreaptă d este paralelă cu un plan α dacă și numai dacă dreapta d nu este inclusă în planul α și este paralelă cu o dreaptă d', conținută în planul α.

Dacă $d \not\subset \alpha$, $d \parallel d'$ și $d' \subset \alpha$, atunci dreapta d este paralelă cu planul α și notăm $d \parallel \alpha$.

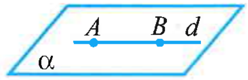
- **Dreaptă secantă planului:** *dreapta și planul au un singur punct comun.*



Dacă o dreaptă a are un singur punct comun cu un plan α, spunem că dreapta intersectează planul sau „înțeapă” planul sau este secantă planului.

Dacă $a \cap \alpha = \{A\}$, atunci dreapta a este secantă planului α.

- **Dreaptă inclusă în plan:** *dreapta și planul au cel puțin două puncte comune.*



Dacă o dreaptă d are cel puțin două puncte comune cu un plan α, spunem că dreapta d este inclusă în planul α sau că dreapta d este conținută în planul α.

Observație:

Conform axiomei includerii: *Dacă două puncte distincte ale unei drepte sunt conținute într-un plan, atunci dreapta determinată în mod unic de cele două puncte este conținută în acel plan*, rezultă că este *suficient* ca două puncte distincte ale unei drepte să fie într-un plan pentru a ne asigura că dreapta este inclusă în acel plan. Dacă A și B sunt două puncte distincte ale unei drepte d ($A \in d$, $B \in d$) și cele două puncte se află într-un plan α ($A \in \alpha$, $B \in \alpha$), atunci dreapta d se află în planul α, adică dreapta d este inclusă în planul α ($d \subset \alpha$). Dreapta d și dreapta determinată de punctele A și B coincid.

EXERSEAZĂ!

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F.

a) Patru puncte care nu sunt situate în același plan se numesc puncte necoliniare. A F

b) Dacă o dreaptă are două puncte distincte comune cu un plan, atunci dreapta este conținută în acel plan. A F

c) Două plane care au un punct comun sunt plane identice. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Printr-un punct, se poate/pot construi:

A. două drepte distincte; B. trei drepte distincte; C. o singură dreaptă; D. o infinitate de drepte.

b) Prin două puncte distincte, se poate/pot construi:

A. un plan; B. două plane; C. trei plane; D. o infinitate de plane.

c) Un plan este determinat de:

A. două puncte distincte; **B. trei puncte coliniare;**

C. două drepte concurente; **D. o dreaptă.**

3. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

a) Prin două puncte distincte se poate/pot construi:

A. o singură dreaptă; B. două drepte distincte; C. trei drepte distincte; D. o infinitate de drepte.

b) Dacă punctele distincte A și B sunt situate în planul α, iar punctul C nu aparține planului α, atunci:

A. $AB \subset \alpha$; B. $AC \subset \alpha$; C. $BC \subset \alpha$; D. A, B, C sunt coliniare.

c) Patru puncte necoplanare pot determina:

A. două plane; B. trei plane; C. patru plane; D. șase plane.

4. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.

Se consideră punctele A, B, C, D necoplanare și se notează cu M și N mijloacele segmentelor AB, respectiv AC.

a) Punctul B nu aparține planului ... 1) (ABC);

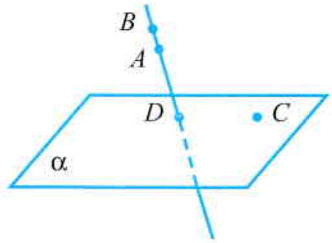
b) Dreapta DM este inclusă în planul ... 2) (ABD);

c) Mijlocul segmentului MN este situat în planul ... 3) (ACD);

4) (BCD).

5. **Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.**
a) Cinci puncte distincte, oricare trei necoliniare, determină ... drepte distincte.
b) Patru puncte necoplanare determină ... plane distincte.
c) Se consideră cubul $ABCDEFGH$. Dreapta comună planelor (ABE) și (BCG) este ... .

FIXEAZĂ!



6. În figura alăturată, punctele A și B sunt exterioare planului α, C se află în planul α și $AB \cap \alpha = \{D\}$.
a) Scrie dreptele determinate de oricare două dintre punctele A, B, C, D.
b) Scrie planele determinate de oricare trei dintre punctele A, B, C, D.
c) Demonstrează că planele (ABC) și (BCD) coincid.

7. Punctele A, B, C sunt necoliniare și aparțin unui plan α, iar punctul M este exterior planului α.
a) Arată că $CB \subset \alpha$ și $AM \not\subset \alpha$.
b) Arată că $(ABC) = \alpha$.
c) Precizează dreapta comună planelor (MAB) și (BCM).

8. Se consideră punctele necoplanare M, N, P, Q și un punct R situat pe segmentul MN.
a) Realizează un desen care să corespundă datelor problemei.
b) Scrie trei drepte care conțin punctul M.
c) Scrie trei plane care conțin punctul R.

FII CAMPION!

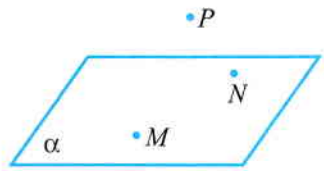
9. Se consideră pătratul $ABCD$ și un punct V exterior planului (ABC).
a) **Află numărul dreptelor determinate de oricare două dintre punctele** A, B, C, D, V.
b) **Află numărul planelor determinate de oricare trei dintre punctele** A, B, C, D, V.

10. Se consideră semidreptele OA, OB, OC, astfel încât $\sphericalangle AOB = 90°$, $\sphericalangle BOC = 110°$ și $\sphericalangle AOC = 130°$. Demonstrează că punctele O, A, B, C sunt necoplanare.

TEMA 1

1. Paralelogramul $ABCD$ are vârfurile situate în planul α, iar punctul E este situat în exteriorul planului α. Arată că planele (ACE) și (BDE) au o dreaptă comună.

2. În figura alăturată, punctele M și N sunt situate în planul α, iar punctul P este exterior planului α. Analizează poziția dreptei MP față de:
   a) dreapta MN;
   b) dreapta NP;
   c) planul α;
   d) planul (MN, NP).



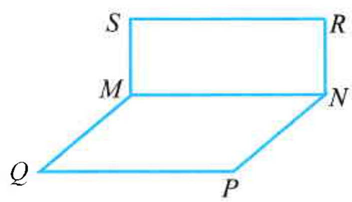
3. Se consideră dreptele a, b și c, astfel încât dreptele a și b, respectiv b și c să fie concurente.
   a) Realizează un desen în care:
      a_1) dreptele a și c să fie coplanare; a_2) dreptele a și c să fie necoplanare.
   b) Scrie planele formate în fiecare din situațiile a_1) și a_2).

4. Segmentele AC și BD sunt situate într-un plan α, $AB \cap CD = \{O\}$, iar punctul E este exterior planului α $(E \notin \alpha)$. Demonstrează că:
   a) planele (AOE) și (BOE) sunt identice;
   b) planele (ADE) și (BCE) au o dreaptă comună;
   c) dreapta OE este conținută în planul (ABE);
   d) intersecția planelor (ACE) și (BOD) este diferită de mulțimea vidă.

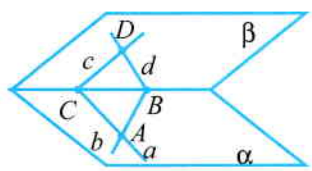
5. Triunghiul ABC are vârful A situat într-un plan α. Dreapta BC intersectează planul α în punctul D.
   a) Determină intersecția planelor (ABC) și α.
   b) Arată că planele (ABD) și (ACD) coincid.

TEMA 2

1. Dreptunghiurile $MNPQ$ și $MNRS$ din figura alăturată sunt situate în plane diferite. Determină dreapta de intersecție a planelor:
   a) (MNP) și (NQS);
   b) (MPR) și (QMN).



2. În figura alăturată, dreptele concurente a și b sunt conținute în planul α. Dreptele concurente c și d sunt conținute în planul β. Se știe că $a \cap b = \{A\}$, $a \cap c = \{C\}$, $b \cap d = \{B\}$ și $c \cap d = \{D\}$.
   Folosește simbolurile $\in$, $\notin$, $\subset$ sau $\not\subset$ pentru a preciza:
   a) poziția punctelor A, B, C, D față de dreptele a, b, c, d și față de planele α și β;
   b) poziția dreptelor a, b, c, d față de planele α și β.



3. Se consideră punctele necoplanare M, N, P, Q.

a) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei.

b) Completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate:

$(MNP) \cap (MQN) = ...$; $(MNP) \cap (NQP) = ...$; $(MNP) \cap (QPN) = ...$.

4. Se consideră un trapez $MNPQ$ și un punct V exterior planului (MNP). Precizează intersecția planelor (VMP) și (VNQ).

5. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. Se notează cu P și Q mijloacele segmentelor AD, respectiv BC.

a) Demonstrează că punctele C, D, P și Q sunt necoplanare.

b) Precizează intersecția planelor (ADQ) și (BCP).

Testul 1

I. Completează în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată, sau litera F, dacă propoziția este falsă.

Punctele A, B, C sunt necoliniare, iar D este simetricul punctului A față de segmentul BC. Atunci:

(5p) 1. $D \in (ABC)$; ☐
(5p) 2. A, B, D, O sunt puncte necoplanare; ☐
(5p) 3. $O \in (BCD)$; ☐
(5p) 4. $A \notin (BCD)$; ☐
(5p) 5. $(ABD) = (ACD)$; ☐
(5p) 6. $(ACD) \neq (ABC)$. ☐

II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A cu litera care indică răspunsul corespunzător din coloana B.

Se consideră cubul $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$. Se notează cu d dreapta determinată de două vârfuri ale cubului, alese la întâmplare.

A	B
(5p) 1. Numărul dreptelor determinate de două vârfuri ale cubului, alese la întâmplare, este egal cu ...	a) $\frac{4}{7}$;
(5p) 2. Probabilitatea ca dreapta d să fie paralelă cu planul bazei $A_5A_6A_7A_8$ este egală cu ...	b) $\frac{3}{7}$;
(5p) 3. Probabilitatea ca dreapta d să fie suport al unei muchii a cubului este egală cu ...	c) $\frac{3}{14}$;
(5p) 4. Probabilitatea ca dreapta d să aibă un singur punct comun cu planul $A_1A_2A_6A_5$ este egală cu ...	d) 28;
	e) 12;
	f) $\frac{2}{3}$.

III. Pentru fiecare enunț de mai jos, alege litera care indică singurul răspuns corect.

(10p) 1. Punctele A, B, C, D aparțin unui plan α, iar punctul M este exterior planului α. Numărul minim de drepte distincte, care se obțin unind punctele două câte două, este:
A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

(10p) 2. Se consideră trei drepte care trec prin același punct și nu sunt coplanare. Numărul planelor determinate de câte două dintre cele trei drepte este:
A. 2; B. 3; C. 4; D. 6.

(10p) 3. Punctul V este exterior rombului $ABCD$. Intersecția planelor (VAC) și (ABD) este dreapta:
A. BD; B. AB; C. AC; D. BD.

(10p) 4. Paralelogramele $ABCD$ și $ABEF$ sunt situate în plane diferite. Dreptele CD și EF sunt:
A. concurente; B. paralele; C. confundate; D. necoplanare.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														

TESTUL 2

I. Completează în căsuța alăturată fiecărui enunț litera A, dacă propoziția este adevărată, sau litera F, dacă propoziția este falsă.

(5p) **1.** Dacă patru puncte sunt necoplanare, atunci trei dintre ele sunt coliniare. ☐

(5p) **2.** O dreaptă paralelă cu un plan este paralelă cu orice dreaptă inclusă în acel plan. ☐

(5p) **3.** Oricare trei puncte din spațiu sunt coliniare. ☐

(5p) **4.** Două drepte situate în plane paralele sunt paralele sau necoplanare. ☐

(5p) **5.** Dacă triunghiul ABC are laturile AB și AC incluse într-un plan α, atunci planul determinat de dreptele AB și AC coincide cu planul α. ☐

(5p) **6.** Există plane paralele cu o dreaptă, care nu sunt paralele între ele. ☐

II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana A cu litera care indică răspunsul corespunzător din coloana B.

Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

	A	B
(5p)	**1.** Precizează poziția dreptei AB față de planul (ACD).	a) paralelă cu planul;
(5p)	**2.** Precizează poziția dreptei AB față de planul $(B'C'D')$.	b) au o dreaptă comună;
(5p)	**3.** Precizează poziția dreptei AB față de planul $(CC'B')$.	c) coincid;
(5p)	**4.** Precizează care este intersecția planelor $(D'AB)$ și $(D'BC)$.	d) inclusă în plan;
		e) secantă planului.

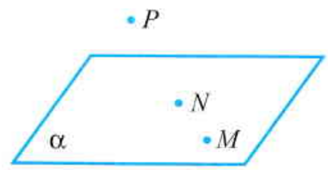
III. Pentru fiecare enunț de mai jos, alege litera care indică singurul răspuns corect.

(10p) **1.** Patru puncte A, B, C, D aparțin unui plan α, iar punctul M este exterior planului α. Numărul maxim de drepte distincte, care se obțin unind punctele două câte două, este:

A. 3; B. 4; C. 5; D. 6.

(10p) **2.** În figura alăturată, punctele M și N sunt situate în planul α, iar punctul P nu aparține planului α. Atunci:

A. $MP \subset \alpha$; B. $MN \not\subset \alpha$;
C. M, N, P sunt coliniare; D. M, N, P sunt coplanare.

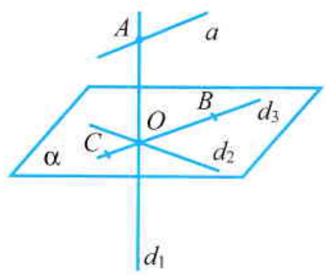


(10p) **3.** Două drepte concurente au:

A. două puncte comune; B. un punct comun;
C. niciun punct comun; D. o infinitate de puncte comune.

(10p) **4.** Analizează desenul alăturat. Dreptele d_1, d_2 și d_3 sunt concurente în punctul O. Punctele B și C sunt situate pe dreapta d_3, iar intersecția dreptelor d_1 și a este punctul A. Atunci:

A. d_2 este secantă planului (a, d_3);
B. planele (a, d_3) și (a, d_1) sunt diferite;
C. punctele A, B, C și O sunt necoplanare;
D. dreapta d_2 este inclusă în planul (d_1, d_3).



Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	I.5	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4
Punctajul														
Nota														